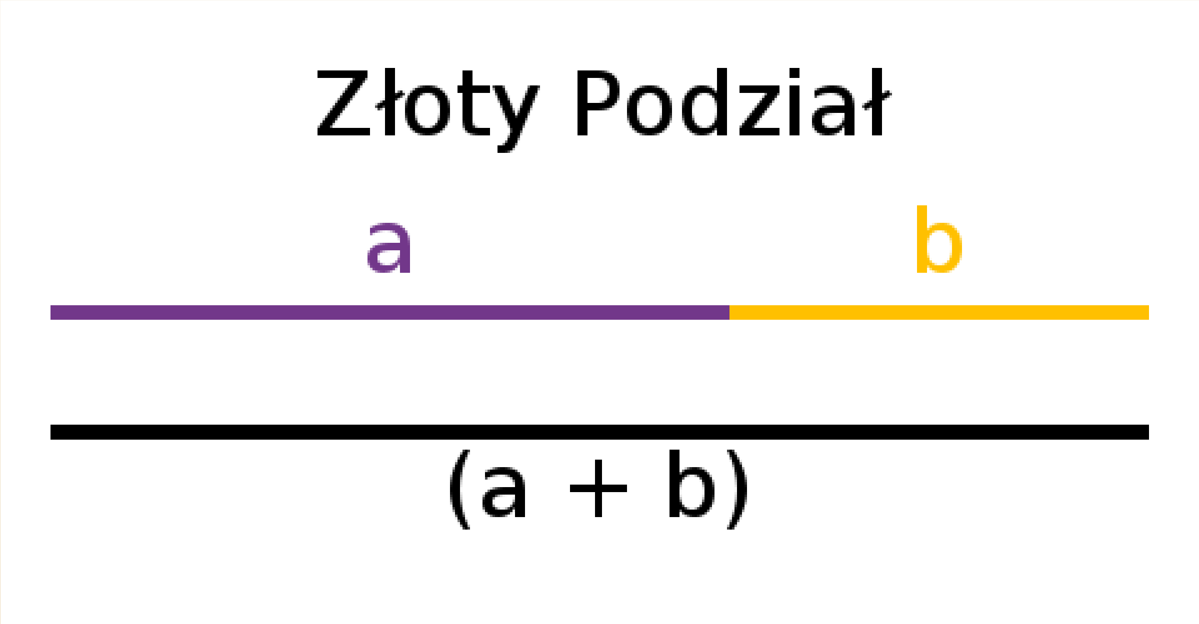
Ułamki łańcuchowe

Autor: Katarzyna Mikke 1d
IV Liceum Ogólnokształcące im. Henryka Sienkiewicza w Częstochowie

Złoty podział, czyli boska proporcja

Podział ten polega na takim podzieleniu odcinka na dwie części, aby stosunek długości dłuższego odcinka do długości krótszego odcinka był taki sam jak stosunek długości dłuższego odcinka do długości całego odcinka(|dłuższy| + krótszy|). Poniższy rysunek przedstawia graficznie powyższe zdanie.



Złoty podział odcinka możemy stosować w nieskończoność, a stosunki pomiędzy odpowiednimi odcinkami będą Złotą Liczbą podniesioną do odpowiedniej potęgi.

Liczba φ (fi)

Wartość liczbowa złotego podziału wynosi zawsze w przybliżeniu 1,618… i nazywana jest złotą liczbą φ (fi). Wyprowadzony na nią *wzór* znajduje się poniżej:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Zaskakującą własnością liczby fi jest to, że jeśli podniesiemy ją do kwadratu, to otrzymamy liczbę dokładnie o jeden większą. Natomiast jeżeli chcielibyśmy porównać odwrotność Złotej Liczby do jej samej, to otrzymamy liczbę fi pomniejszoną o jeden.

Liczbę φ możemy przedstawić w formie ułamka łańcuchowego nieskończonego:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}}}}}}$$

Krótka historia ułamków łańcuchowych

Wydaje się, że pierwszym zastosowaniem ułamków łańcuchowych jest algorytm Euklidesa (około 306-283 r.). Pozwala on obliczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych i prowadzi do pewnego skończonego ułamka łańcuchowego.

W Europie miejscem narodzin ułamków łańcuchowych są bez wątpienia północne Włochy. Pierwszą próbę ogólnej definicji ułamków łańcuchowych zawdzięczamy Leonardowi Fibonacciemu. Jego sławny traktat *Liber* wprowadza ułamki łańcuchowe *wstępujące*, które nie są zbyt ciekawe.

Pierwszym matematykiem, który naprawdę stosował ułamki łańcuchowe nieskończone w obecnym rozumieniu tego pojęcia, był Rafael Bombelli (1526-1572), odkrywca liczb zespolonych. W tym drugim wydaniu swojej książki Bombelli podał algorytm rekurencyjnego pierwiastkowania liczby 13 w pełni równoważny konstrukcji ułamka łańcuchowego:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4|}{|6} + \frac{4|}{|6} + \cdots$$

Ogólna definicja ułamka łańcuchowego

Ułamkiem łańcuchowym nazywane jest wyrażenie zapisane w postaci:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}}$$

gdzie:
$\mathbf{a_0} \in Z$
$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n} \in N_+$

Za pomocą ułamków łańcuchowych możliwe jest zapisanie każdej liczby rzeczywistej, przy czym dla liczby wymiernej ułamek jest skończony, natomiast dla niewymiernej nieskończony.

Zapis ze względu na wygodę często zastępuje się następującym zapisem w notacji poziomej:

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

Istnieje również zapis ułamka łańcuchowego w notacji Pringsheima, której postać jest następująca:

$$a_0 + \frac{1 \mid}{\mid a_1} + \frac{1 \mid}{\mid a_2} + \frac{1 \mid}{\mid a_3} + \cdots + \frac{1 \mid}{\mid a_n}$$

UWAGA: Warunki na zmienne nie zmieniają się.

Zamienianie pierwiastków na ułamki łańcuchowe nieskończone tzw. okresowe

Zajmiemy się pierwiastkami, których liczbę pierwiastkową możemy zapisać za pomocą sumy zmiennej k podniesionej do kwadratu i 1. Zmienna k należy do zbioru liczb rzeczywistych dodatnich.

1. $x = \sqrt{k^2+1}, \quad k \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{N}_+$

$$x = \sqrt{k^2+1} \qquad /()^2$$

$$x^2 = k^2 + 1 \qquad /-k^2$$

$$x^2 - k^2 = 1$$

2. $(x-k)(x+k) = 1 \quad /\div(x+k)$ **3.**

$$x - k = \frac{1}{x+k} \qquad /+k$$

$$x = k + \frac{1}{x+k}$$

4. $$x = k + \cfrac{1}{k + k + \cfrac{1}{x+k}}$$

5. $$x = k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{x+k}}$$

6. $$x = k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{2k+\ddots}}}$$

7. $x = [k; \overline{2k}]$

1. Jeśli zmienna k należy do zbioru liczb naturalnych dodatnich, to x również należy do zbioru liczb rzeczywistych dodatnich.

2. Rozpisujemy wyrażenie ze wzoru skróconego mnożenia

3. x+k > 0

4. W miejsce x podstawiamy wyrażenie k+ 1:(x+k)

5. Porządkujemy jednomiany otrzymując 2k.

6. Podstawiając w miejsce x ponownie wcześniejsze wyrażenie otrzymujemy ułamek łańcuchowy nieskończony

7. Przy ułamkach łańcuchowych nieskończonych stosujemy notację uproszczoną pisząc kreskę poziomą nad powtarzającą się grupą mianowników

Zamieńmy √5 na ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\sqrt{5} = \sqrt{k^2+1}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} \qquad \Big/ ()^2$$

$$(\sqrt{5})^2 = 2^2+1 \qquad \Big/ -2^2$$

$$(\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1$$

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 1 \qquad \Big/ \div(\sqrt{5}+2)$$

$$\sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \qquad \Big/ +2$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

$$\sqrt{5} = [1; \bar{4}]$$

Zadanie 1

Zamień √10 na ułamek łańcuchowy nieskończony

Rozwiązanie

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \qquad \Big/ ()^2$$

$$(\sqrt{10})^2 = 3^2+1 \qquad \Big/ -3^2$$

$$(\sqrt{10})^2 - 3^2 = 1$$

$$(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3) = 1 \quad \Big/ \div(\sqrt{10}+3)$$

$$\sqrt{10} - 3 = \frac{1}{\sqrt{10}+3} \quad \Big/ +3$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{\sqrt{10}+3}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{3+3+\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}}$$

$$\sqrt{10} = [3;\bar{6}]$$

Zamienienie ułamków zwykłych na ułamki łańcuchowe skończone

$$\frac{8}{23} \overset{\textbf{1.}}{=} \frac{1}{\frac{23}{8}} \overset{\textbf{2.}}{=} \frac{1}{2+\frac{7}{8}} \overset{\textbf{3.}}{=} \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{8}{7}}} \overset{\textbf{4.}}{=} \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{7}}}$$

1. Zapisujemy ułamek jako odwrotność jego odwrotności
2. Wyciągamy z uzyskanego ułamka części całkowite
3. Ponownie zapisujemy otrzymany ułamek jako odwrotność odwrotności i wyciągamy część całkowitą
4. Ponawiamy powyższe czynność aż do czasu, gdy licznik ułamka uzyska wartość 1

Zadanie 2

Zamień ułamek $\frac{5}{29}$ na ułamek łańcuchowy skończony według wcześniej zaprezentowanego schematu

Rozwiązanie

$$\frac{5}{29}=\frac{1}{\frac{29}{5}}=\frac{1}{5+\frac{4}{5}}=\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

Koniec

Źródła:

- https://www.obliczeniowo.com.pl/18
- https://pl.wikipedia.org/wiki/U%C5%82amek_%C5%82a%C5%84cuchowy
- https://fiksacie.wordpress.com/2012/01/08/ulamki-lancuchowe-cz1-wstep/
- http://www.deltami.edu.pl/
- https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/download/4125/3721