Miłosz Szczypior
IV Liceum Ogólnokształcące im. Henryka Sienkiewicza w Częstochowie
Nowy Kocin, ul. Prosta 59

CIEKAWOSTKI MATEMATYCZNE

Wstęp

Oczywiście jest wiele ciekawostek matematycznych, wręcz nieograniczona ilość. Powstały zadania anegdotyczne z Francji, Indii, Arabii, Rosji i innych państw. Będą zadania o podziałach, rozstawianiach, pieniądzach, rowach itd. Z bardzo znanych matematyków i też nieznanych. Każde zadanie jest łatwe, jeśli zna się podstawy matematyki, algebry i geometrii.

1. Sprzedawanie całych jajek za pomocą połówek jajek

Sprzedawczyni opowiadała - wydaje się - niemożliwą historię:
- Dzisiaj rano pierwsza klientka kupiła połowę wszystkich jajek i jeszcze pół jajka, druga połowę pozostałych jajek i też pół jajka, trzecia tak samo i czwarta, piąta i szósta klientka. W koszyku zostało wtedy jedno jajko.
- Przecież nie da się sprzedawać pół jajka.
- Ale zawsze sprzedawałam całe jajka.

Wtedy wtrącił się student.
- Ja byłem siódmym klientem i kupiłem połowę wszystkich jajek i pół jajka.
- Pamiętam pana, pan kupił ostatnie jajko.

Wszystko polegało na tym, że zawsze w koszyku była nieparzysta ilość jajek, a ich ilość w koszyku można podstawić pod wzór 2n - 1, gdzie n to liczba naturalna. Kupujący powoduje zniknięcie połowy zapasu (n - 0,5) i dodatkowo pół jajka (1/2), czyli każdy klient kupował n + 1 jajek, czyli zawsze klient kupował całkowitą ilość jajek, przy czym zostawiał zawsze liczbę nieparzystą. A jeśli zapytać, ile było jajek na początku?

Rozwiązuje się to zadanie od końca.

KUPUJĄCY	ZASTAŁ	KUPIŁ	ZOSTAWIŁ
siódmy	1	1	0
szósty	3	2	1
piąty	7	4	3
czwarty	15	8	7
trzeci	31	16	15
drugi	63	32	31
pierwszy	127	64	63

Na początku było 127 jajek.

2. Żołnierze na warcie

Na kwadratowe podwórko przybył porucznik z oddziałem żołnierzy, których rozstawił do warty. Na każdy bok rozstawił 4 żołnierzy i oddalił się. Później przybył kapitan i uznał ochronę za niedostateczną i postawił po 5 ludzi na bok. Na koniec przyszedł major i wzdłuż każdej ściany ustawił 6 żołnierzy. Jak rozstawiono żołnierzy za pierwszym, drugim i trzecim razem, jeśli zawsze była ich ta sama ilość?

Rozwiązanie nie jest trudne.

Za pierwszym razem po rogach był 1 żołnierz, a po bokach 2, później w rogach znalazło się 2 zabierając z boków, a za trzecim razem wszyscy znajdowali się w rogach.

3. Karol Gauss i dodawanie następnych liczb naturalnych

Kiedy Karol skończył 7 lat, oddano go do tzw. szkoły początkowej. Rachowania uczył w niej starszy człowiek, znany ze swej surowości. Często chcąc mieć czas na sprawdzenie prac z innych oddziałów dawał swym uczniom zadanie trudniejsze, które musieli wykonać samemu. Umówiono się, że kto skończył, oddawał zeszyt na katedrę. Na jednej z lekcji podał zadanie "Znaleźć sumę wszystkich liczb od 1 do 40". Myślał, że uczniowie zajmą się tym na długo, ale jakże się zdziwił widząc Karola oddającego zeszyt na katedrę. Rozgniewany nauczyciel myśląc, że to wykręt, mruknął "Oduczę ja cię, smyku, podobnych sztuczek". A Gauss wrócił do ławki i czekał na poprawki. Później wszyscy oddali swoje zeszyty i nauczyciel zajął się poprawianiem. Wszyscy porobili błędy. Oprócz Karola. Gauss szybko odnalazł się w zadaniu. Oto schemat rozumowania, który odbywał się w jego głowie.

1, 2, 3, 4, 5,………. 20 40,
39, 38, 37, 36, ………. 21
====================
41, 41, 41, 41, 41, ……… 41

Najmniejsza i największa liczba dają liczbę 41. To samo spowoduje dodanie drugiej najmniejszej i największej itd. Chłopcowi wystarczyło pomnożyć 20x41 i wpisał jedyną liczbę: 820.

Nauczyciel zrozumiał, że w klasie ma dziecko o ogromnych zdolnościach i postanowił się mu oddać, ale prędko zrozumiał, że nie może mu już żadnej wiedzy przekazać.

4. Podział zapłaty

Dwaj Arabowie wędrowali przez pustynię. Do oazy doszliby w pół dnia. Ze wszystkich zapasów żywności jeden miał tylko 5 sucharów, drugi 3. Spotkali samotnego wędrowca, który poprosił ich o posiłek. Zlitowali się nad nim i razem z nim zjedli wszystkie suchary. Dziękując dał im 8 złotych monet. Przy podziale monet pokłócili się. Arab z 5 sucharami zechciał 5 monet, a ten z 3 sucharami chciał podzielić po równo, bo - trudno się nie zgodzić - obaj przyczynili się do uratowania bogacza.

Jak powinni się podzielić?

Zdecydowali, że po dojściu do oazy zapytają się miejscowego kadiego, jak rozwiązać spór. A ten ogłosił wynik nieoczekiwany:

- Oboje się mylicie. Mieliście razem 8 sucharów i załóżmy, że każdy z was podzielił swoje suchary na 3 części, czyli macie 24 części. Załóżmy też, że wy i wędrowiec zjedliście po 8 części. Z tego wynika to, że ty (mający 5 sucharów) miałeś 15 części, zjadłeś 8 i dałeś 7 części nieznajomemu, a ty (mający 3 suchary) dałeś jedynie 1 część. Dlatego jednemu z was należy się 7 złotych monet, a tylko 1 drugiemu.

Jest jeszcze jedna odmiana tego samego zadania:

Dwaj chłopcy, Michał i Paweł zbierali w lesie chrust i chcieli spożyć śniadanie. Michał miał 4 kromki chleba, a Paweł 7. Zbierali się, gdy przyszedł podróżny i poprosił o wspólny posiłek. Zgodzili się i po śniadaniu podróżny podarował im 1 zł 10 gr. - Według mnie pieniądze powinniśmy podzielić po połowie - powiedział Michał. Paweł zaprzeczył: - Mieliśmy razem 11 kromek chleba i dostaliśmy 1 zł 10 gr. Na jedną kromkę przypadło 10 gr. Ja miałem 7, a ty 4, dlatego ja powinienem dostać 70 groszy, a ty 40.

Który z chłopców prawidłowo obliczył?

5. Podział majątku umierającego męża

Młody mąż czując bliską śmierć, wezwał notariusza, by spisał testament. W tym czasie miał ciężarną żonę i miało za kilka miesięcy urodzić się mu dziecko, dlatego zarządził: Jeśli urodzi mi się syn, to otrzyma 2 razy większy majątek niż matka, a jeśli urodzi się córka, to matka dostanie 2 razy więcej niż córka. Po śmierci na świat przyszły jednak bliźnięta: syn i córka. Jak trzeba podzielić spadek po ojcu? Jest to zadanie podobne do zadania bardzo starodawnego, bo jeszcze z czasów starożytnego Rzymu, a brzmiało ono tak: Mąż umierając zostawił żonę spodziewającą się narodzin dziecka i zapisał, że jeśli przyjdzie na świat syn, to on otrzyma 2/3 majątku, a matka 1/3, inaczej córka miała dostać 1/3, a matka 2/3. Urodziły się bliźnięta: syn i córka. Jak wypełnić ostatnią wolę?

Rzymski sędzia Salvian Julian tak rozwiązał ten problem prawniczy: Majątek zostanie podzielony na 7 części, z czego syn dostanie 4/7, matka 2/7, a córka tylko 1/7 majątku. Rzymianie mieli słabych matematyków, ale najlepszych sędziów.

6. Znajdowanie odległości przedmiotu o znanych rozmiarach za pomocą palca

Powiedzmy, że oddaliliśmy się od jakiegoś miejsca i chcemy wiedzieć, na jak daleko się odeszliśmy albo na wycieczce widzimy jakiś punkt i chcemy wiedzieć, jak daleko od niego jesteśmy. Nie mając żadnego narzędzia można posłużyć się ręką i okiem. Wyciągamy przed siebie prawą rękę i przymykając lewe oko kierujemy tak wyciągnięty wskazujący palec, by stykał się z lewym bokiem obiektu pożądania. Następnie starając się nie ruszać ręką otwieramy lewe oko i przymykamy prawe, przez co palec pozornie przesunie się w prawo i np. palec będzie w połowie jakiegoś obiektu. Już to wystarczy, by określić jako tako poszukiwaną odległość.

Zwykle powinniśmy wiedzieć, jaka jest odległość od palca do oka, np. niech będzie to 70 cm. Powinniśmy też znać odległość między źrenicami, np. 7 cm. Powiedzmy, że patrzymy na dom i jego szerokość wynosi 20m, a że różnica między patrzeniem prawym okiem a lewym wynosi pół domu, to 10m jest ostatnim wyrazem proporcji:

$$\frac{0{,}7 \text{ (odległość od oka do palca w metrach) x } 10}{0{,}07 \text{ (odległość między źrenicami w metrach)}} = 100 \text{ m}$$

7. “Najtańsza” furmanka

Pewien mieszkaniec małego miasteczka znany był ze swego skąpstwa. Gdy musiał dojechać do miasta powiatowego odległego o 25 km, polował na sąsiadów o podwiezienie. Jednak czasem nie ma uczynnych sąsiadów i musiał wziąć płatną furmankę. Obszedł wszystkich dorożkarzy i próbował się targować: jeden pozwolił na 250 złotych, inny 200, kolejny 150. Żadna cena była według niego nie do przyjęcia. Aż tu doszedł do chłopa z wózkiem i szkapiną. Zapytał się, ile zechce za podwiezienie go do domu, a ten odpowiedział:

- Za pierwszy kilometr pan mi da grosz, raczej niewiele, za drugi da pan 2, bo droga zła, na trzecim jest pod górkę, dlatego pan da mi 4 grosze, na następnym koń będzie zmęczony i górka jeszcze większa to pan da 8 i później tak 2 razy więcej groszy za kilometr tak aż do końca.

- Głupi chłop - pomyślał mieszczuch - na grosze liczy. Nie mam obowiązku go pouczać, jeśli nie umie liczyć.

Wszedł do wózka.

- Zgoda, jedziemy!

Pojechali, ale gdy dojechali, okazało się, że skąpiec musiał oddać “głupiemu” chłopowi całe gospodarstwo, wszystko co miał, a i tak musiał zostać jego parobkiem “na odrobek”, bo ta “najtańsza” furmanka kosztowała go równo 335 544 zł 31 gr. Można to przeliczyć, że w postępie zaczynającego się od 1 i każda następna cyfra będzie 2 razy większa, to suma tych liczb będzie się równać 2^{25} - 1.

8. Parostatek i tratwy

Parostatek płynie z Warszawy do Gdańska 2 dni, a z takim samym zanurzeniem z powrotem w 3 dni. Ile dni będą płynąć tratwy z Warszawy do Gdańska? Wygląda to tak, jakby było za mało danych: nie ma odległości z Warszawy do Gdańska wzdłuż Wisły, ani prędkości tratw. Ale jednak jest to wykonalne. Można przypuścić, że odległość między miastami wynosi tak na oko 450 km. Parostatek przepływa 225 km dziennie w dół rzeki, a w górę 150 km, bo nurt rzeki go spowalnia o 75 km na dobę. Za prędkość nurtu należy przyjąć 75 : 2 = 37,5 km na dobę, a prędkość własną statku (na stojącej wodzie) 187,5 km na dobę.

Tratwa porusza się dzięki nurtowi, dlatego płynie do Gdańska w 450:37,5 = 12 dni. Da się również to zadanie rozwiązać nawet bez znania odległości z Warszawy do Gdańska. Parostatek przepływa z biegiem rzeki w ciągu doby ½ drogi, a w drugą stronę ⅓ drogi. Jeśli nie byłoby prądu, statek przepłynie 5/12 drogi, czyli woda przepływa w ciągu dnia 1/12 tej odległości, skąd wynika to, że tratwy przepłyną dystans w 12 dni.

9. Wagon pełny lżejszy niż pusty

Często w składach wagonów kolejowych znajdują się cysterny do przewożenia gazu. Waga samych wagonów wynosi zwykle około 10 ton, a ich pojemność około 50 m^3. Przypuśćmy, że został wypełniony do pełna wodorem, którego 1 m^3 waży ok. 80 g. Ile będzie ważyć wagon razem w ładunkiem? Nie dość, że nie będzie cięższy od wagonu pustego, ale będzie nawet lżejszy. Żeby go najpierw napełnić, trzeba było upuścić powietrza, którego 50 m^3 waży około 65 kg, zaś tyle wodoru waży ok. 4,5 kg. Tak wagon stanie się lżejszy o 65 - 4,5 = 60,5 kg.

10. Wiek rodzeństwa

W rodzinie jest 5 dzieci, Jaś, Teresa, Sławek, Nela i Hania. Jaś jest 2 razy starszy od Teresy. Nela i Terenia razem mają 2 razy tyle lat, ile Jaś. Sławek i Jaś razem mają 2 razy tyle lat, ile Nela i Teresa razem. Hania, Nela i Teresa mają 2 razy tyle lat, ile Sławek i Jaś razem. Hania akurat ukończyła 21 lat. Ile lat ma każde z rodzeństwa? Obliczenie jest łatwe, jeśli za podstawową miarę wieku przyjmie się wiek Teresy. Oznaczymy go jako t. Terenia ma t lat. Jaś ma 2t lat. Nela i Teresa mają razem 4t lat, więc Nela ma 3t lat. Sławek i Jaś mają razem 8t lat, więc Sławek ma 6t lat. Hania, Nela i Teresa mają razem 16t lat, więc Hania ma 12t lat. To oznacza, że 12t = 21, czyli t = 1 ¾. Reszta obliczeń idzie łatwo.
Teresa ma rok i 9 miesięcy, Jaś ma 3,5 roku, Nela ma 5 lat i 3 miesiące, a Sławek 10,5 roku.

11. Sakiewka z pieniędzmi

Ignatiew w swoim zbiorze rozrywek matematycznych "W carstwie smiekałki" przytacza takie zadanie rosyjskie: Działo się to w dawnej Rosji. Czterej wieśniacy: Bazyli, Mitrofan, Polikarp i Teodozy wracali z miasta narzekając, że nic nie zarobili. - Dobrze by było - rzekł Bazyli - gdybym tak znalazł na drodze sakiewkę, to zatrzymałbym sobie trzecią część, a resztę z sakiewką oddałbym wam do podziału. - A ja - powiedział Mitrofan - podzieliłbym na równe części. - Mnie i piąta wystarczyłaby część - zapewnił Polikarp. - A ja poprzestanę na szóstej części - dorzucił Teodozy. - Ale co długo o tym mówić? Kto i kiedy znalazłby na drodze pieniądze.
A tu zaskoczenie! widzą na gościńcu sakiewkę. Podnieśli ją i zdecydowali się podzielić się pieniędzmi tak, jak każdy proponował, czyli Bazyli dostanie trzecią część, Mitrofan czwartą, Polikarp piątą, a Teodozy szóstą.
Otworzyli sakiewkę i znaleźli 8 banknotów: 1 trzyrublowy, a reszta to były jedno-, pięcio- i dziesięciorublówki. Żaden wieśniak nie mógł otrzymać swej części przed zamianą na

drobne. Postanowili zwrócić się o pomoc do pierwszej osoby, którą napotkają. Wtedy mija ich jeździec i zatrzymali go wieśniacy: -
Znaleźliśmy sakiewkę z pieniędzmi - mówią - i pieniądze chcemy tak a tak podzielić. Prosimy o zamianę rubla na drobne. - Rubla wam nie zamienię, lecz dajcie mi sakiewkę: Włożę tam swój papierek jednorublowy i ze wszystkich pieniędzy, które tam będą, wydam po część, a dla siebie zatrzymam sakiewkę.

Wieśniacy przystali na propozycję. Jeździec dołożył rubla, po czym wydał Balizemu ⅓, Mitrofanowi ¼, Polikarpowi ⅕, a Todozemu ⅙, a sakiewkę schował - Dziękuję wam bardzo, przyjaciele! I wy zadowoleni, i ja zadowolony jestem z podziału - powiedział im na pożegnanie nieznajomy i wkrótce znikł im z oczu.

Ostatnie słowa zaniepokoiły wieśniaków.

- Za co nam tak dziękował?

- Chłopcy, ile mamy papierków? - zapytał Mitrofan. Było ich 8. - A kto ma trzyrublówkę? Nikt jej nie miał.

- A to nas nabrał! Obliczmy szybko, na ile on pokrzywdził każdego!

Naraz zdziwienie.

Towarzysze, przecież ja dostałem więcej, niż mi się należało! - zawołał Bazyli.

- I ja również! I ja - zawtórowali mu Polikarp i Teodozy.

- I ja otrzymałem o 25 kopiejek (100 kopiejek daje rubel) więcej - powiedział Mitrofan.

- Jak to się mogło stać? Wszystkim dał więcej, niż należało, a trzyrublówka znikła.

Ile pieniędzy znaleźli wieśniacy?
Czy jeździec ich oszukał?

Jakie banknoty wręczył każdemu?

Cała magia polegała na tym, że wieśniacy nie umieli dodawać ułamków. Dodajmy wszystkie części, na które chcieli podzielić pieniądze:

1 1 1 1 57 --
+ -- + -- + -- = --- 3
4 5 6 60

To oznacza, że chcieli podzielić między siebie mniej, niż znaleźli. Znalezione pieniądze wraz z pieniędzmi jeźdźca zostały podzielone na 60 części, z tego 57/60 dostali wieśniacy, a 3/60 zatrzymał dla siebie jeździec. Wiadomo, że jeździec zabrał trzyrublówkę. To znaczy, że 1/20 wszystkich pieniędzy to były 3 ruble, a wszystkich pieniędzy było 60 rubli. Mitrofan dostał ¼ pieniędzy, czyli 15 rubli, ale bez dołożenia rubla od jeździca dostałby 14 ¾ rubla ("I ja otrzymałem o 25 kopiejek więcej"). Początkowo w sakiewce było 59 rubli, a razem z papierkiem nieznajomego 60. Dał od siebie rubla, a wziął 3 ruble, tak na podziale zarobił 2 ruble. A jakie banknoty były w woreczku? 5 dziesięciorublówek, 1 pięciorublówka, 1 trzyrublówka i 1 jednorublówka. Bazyli dostał 20 rubli (2 banknoty po 10), Mitrofan 15 (dziesiątka i piątka), Polikarp 12 (dziesiątka i 2 jedynki, w tym 1 od jeźdźca) i Teodozy 10 rubli (dziesiątka).

12. Rów i deski

Czworokątne pole otoczone jest rowem jednakowej szerokości na całej długości. Do przejścia mają pomóc 2 deski, których długość jest idealnie równa szerokości rowu. Jak zrobić z nich most. Da się to zrobić kładąc most na rogu. Można to udowodnić nierównością

pierwiastek z 2 < 1 ½

Jeżeli za jednostkę długości przyjmie się szerokość rowu, to odległość na rogu AB wyniesie około 1,414. Długość deski jest równy szerokości rowu i wyraża się 1. Gdy przy rogu B położy się deskę na skos, utworzony zostanie trójkąt prostokątny równoramienny i brzeg deski CD będzie odległy od rogu A o ok. 0,914 szerokości rowu. To wystarcza w zupełności na położenie drugiej deski na środku pierwszej i postawienie jej na rogu A (0,086 długości desek, przy trzymetrowych deskach zostanie ponad 25 cm).

13. Zakończenie

Nie da się w kilku stronach pomieścić wszystkich zadań, bo t.j. we wstępie ich ilość jest nieograniczona. To nie znaczy, że są mniej interesujące.

14. Bibliografia

- “Lilavati” autorstwa Szczepana Jeleńskiego, rozdział 1 “Anegdoty matematyczne i zadania anegdotyczne”