Interesujące właściwości w świecie liczb

Miłosz Szczypior kl. Id

Interesujące właściwości w świecie liczb

Miłosz Szczypior kl. Id

Właściwości siódemki

Jeśli w postępie arytmetycznym, którego pierwszym wyrazem i różnicą jest liczba 15873 (czyli 15873, 31746, 47619 itd.), mnożyć będziemy przez 7, otrzyma się ciekawe iloczyny. Liczby 15873, 31746 itd. do 142857 mnożone przez 7 dają zawsze liczbę składającą się z powtórzonej 6 razy powtórzonej tej samej cyfry:

15873 x 7 = 111111   31746 x 7 = 222222   …   79365 x 7 = 555555   …   142857 x 7 = 999999

Można ten zbieg łatwo wyjaśnić: 31746 x 7 = (2 x 15873) x 7 = 2 x (15873 x 7) = 2 x 111111

Ale trudniej jest wytłumaczyć jest to,

że jeśli między 49 (kwadrat 7) będzie się wstawiać 48, czyli:

49, 4489, 444889, 44448888 …

to będą zawsze pełne kwadraty:

49 = 7*2   4489 = 67*2   444889 = 667*2   44448889 = 6667*2   ………..

Jeszcze ciekawiej jest z kombinacją 7x11x13 (czyli 143)

Jeśli pomnoży się liczbę 143 z jedną z dowolnych pierwszych 999 wielokrotności 7, to iloczyn będzie złożony z dwóch identycznych liczb, np.:

28 x 143 = 4004   315 x 143 = 45045   1001 x 143 = 143143   2464 x 143 = 352352

3591 x 143 = 513513   5495 x 143 = 785785   6993 x 143 = 999999

Należy też zauważyć, że podzielona wielokrotność przez 7 daje liczbę powtarzającą się w iloczynie:

28:7 = 4   315:7 = 45   2464:7 = 352 ……

To zjawisko trudne na pierwszy rzut oka wyjaśnia się w miarę prosto. Wystarczy stwierdzić, że 7 x 143 = 1001.

2464 x 143 = (352 x 7) x 143 = 352 x (7 x 143) = 352 x 1001 = 352 x 1000 + 352 = 352352

Podobne rezultaty otrzymuje się mnożąc 77 przez 999 pierwszych wielokrotności 13 lub 91 przez tę ilość wielokrotności 11.

Przejście do dziewiątki zostanie poprzedzone piramidką iloczynów

$9 \times 7 = 63$

$99 \times 77 = 7623$

$999 \times 777 = 776223$

$9999 \times 7777 = 77762223$

$99999 \times 77777 = 7777622223$

i tak dalej.

Każdą liczbę można rozłożyć do dziewiątki pomnożonej pewną ilość i sumy cyfr składających liczbę.

Przykłady:

4 = 0 x 9 + 4

84 = 8 x 9 + (8+4)

214 = 23 x 9 + (2+1+4)

511 = 56 x 9 +(5+1+1)

2033 = 225 x 9 + (2+0+3+3)

Można tak postępować z każdą liczbą:

696679 = (wielokrotność 9)+(6+9+6+6+7+9)

Gdy liczba zapisana jest jedną cyfrą i kilkoma zerami...

… można ją zapisać sumą tej cyfry i pomnożonej liczbie napisaną tyloma dziewiątkami, ile zer prowadzi cyfra:

10 = 9 x 1 + 1   300 = 99 x 3 + 3   2000 = 999 x 2 + 2

90000 = 9999 x 9 + 9   600000 = 99999 x 9 + 6

itd.

Gdy przy ciągu pierwszych 10 liczb naturalnych...

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

… pomnoży się te liczby przez 9, skąd wychodzi: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

Ostatnie cyfry tych liczb stanowią odwrotny ciąg pierwszych 10 liczb naturalnych. Tak samo będzie z każdym ciągiem z 10 liczbami, gdzie pierwsza z nich kończy się jedynką:

111 x 9 = 999   112 x 9 = 1008   113 x 9 = 1017   114 x 9 = 1026 itd.

Kilka tabliczek związane z mnożeniem 9

1.

1 x 9 = 09	90 = 9 x 10
2 x 9 = 18	81 = 9 x 9
3 x 9 = 27	72 = 9 x 8
4 x 9 = 36	63 = 9 x 7
5 x 9 = 45	54 = 9 x 6

2. Jakakolwiek liczba pomnożona przez 9 daje sumę cyfr równą 9 lub podzielną przez 9:

9 x 1 = 9	9 x 10 = 90	33 x 9 = 297
9 x 2 = 18, 1+8=9	9 x 11 = 99	34 x 9 = 306
9 x 3 = 27, 2+7=9	9 x 12 = 108	35 x 9 = 315
9 x 4 = 36, 3+6=9	9 x 13 = 117	36 x 9 = 324
9 x 5 = 45, 4+5=9	9 x 14 = 126	37 x 9 = 333
……	……	…...

3.

1 x 9 + 2 = 11
12 x 9 + 3 = 111
123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 9 + 5 = 11111
12345 x 9 + 6 = 111111
123456 x 9 + 7 = 1111111
1234567 x 9 + 8 = 11111111
12345678 x 9 + 9 = 111111111

4.

9 x 9 + 7 = 88
98 x 9 + 6 = 888
987 x 9 + 5 = 8888
9876 x 9 + 4 = 88888
98765 x 9 + 3 = 888888
987654 x 9 + 2 = 8888888
9876543 x 9 + 1 = 88888888
98765432 x 9 + 0 = 888888888
987654321 x 9 - 1 = 8888888888

By pomnożyć coś przez jakiś ciąg 9 (np. 99, 999 itp.)...

Wystarczy zrobić tylko jedno odejmowanie. Jeśli przyjąć, że trzeba pomnożyć przez tę liczbę 29486, trzeba napisać tę liczbę jako odjemną i jako odjemnik, który zostanie przesunięty o tyle miejsc w prawo, ile jest dziewiątek, np. o 3 miejsca w przypadku mnożenia przez 999:

```
   29486 . . .
      - 29486        I to jest poszukiwany iloczyn.
===========

   29456514
```

Podobnie można to zastosować w przypadku dzielenia.

Potrzeba np. podzielić 6725 przez 99. Najpierw podzieli się przez 100: 6725 = 67 x 100 + 25
A 100 = 99 + 1, więc: 67 x 100 = 67 x 99 + 67
Można zauważyć, że: 6725 = 67 x 99 + (67 + 25)

Dzieląc tę liczbę przez 99 otrzymuje się w ilorazie 67 i resztę złożoną z 67 (liczba setek w dzielnej) i 25 (końcówka dzielnej po odrzuceniu setek). A skoro 67 + 25 = 92, to: 6725 : 99 = 67 r 92. Gdyby reszta przekroczyła wartość dzielnika, należy dołożyć do ilorazu tyle, ile razy dzielnik zmieścił się w reszcie.

Bardzo pożyteczny sposób na sprawdzenie poprawności dzielenia przez 9.

Reszta z podziału jakiejkolwiek liczby przez 9 jest równa reszcie dzielenia sumy cyfr tej liczby przez 9.

Przykład (bez ilorazu, jedynie reszta):

```
1374 : 9
  9
======
  47
  45
======
   24
   18
======
  6 r.
```

1 + 3 + 7 + 4 = 15

15 : 9 = 1   6 r.

Z tego również wynika, że jeśli od jakiejś liczby odejmie się sumę cyfr, wychodzi liczba podzielna przez 9:

1374 - (1 + 3 + 7 + 4) = 1359

Liczba 1359 dzieli się przez 9, ponieważ suma cyfr jest podzielna przez 9.

Suma kilku liczb podzielona przez 9 daje taką samą resztę, jak suma cyfr tych liczb, np.:

619 + 543 + 278 = 1440

```
1440 : 9
  9
======
  54
  54
======
   0 r.
```

```
6 + 1 + 9 = 16
5 + 4 + 3 = 12
2 + 7 + 8 = 17
===========
         45
45 : 9
45
=====
 0 r.
```

To samo można zauważyć przy odejmowaniu, gdzie oblicza się różnicę sum cyfr.

Kłopot może zajść, gdy suma cyfr odjemnika jest większa od sumy cyfr odjemnej. Wtedy należy tyle dziewiątek do momentu możliwości odejmowania, np:

2012 - 1942 = 70 2 + 0 + 1 + 2 = 5

70 : 9 = 7 r. 7 1 + 9 + 4 + 2 = 16

J

ak odjąć 16 od 5? Dodając tyle dziewiątek, by dało

się odjąć, czyli 5 + 9 + 9 = 23

23 - 16 = 7

Resztę iloczynu dwóch liczb można znaleźć, mnożąc reszty dziewiątkowe obu czynników i dzieląc iloczyn przez 9.

```
      30
x     28
=======
     240
     60
=======
     840
```

```
840 : 9
81
=====
 30
 27
=====
  3 r.
```

```
3 + 0 = 3
2 + 8 = 10

10 x 3 = 30

30 : 9
27
====
 3 r.
```

Mnożenie reszt daje 30, które następnie jest dzielone: 30 : 9 = 3 r. 3. 30 daje resztę taką samą jaką ma liczba 840.

Opierając się na poprzedniej własności można w ciekawy sposób dzielić przez 9.

Niech będzie potrzeba podzielić przez 9 liczbę 353069.

Trzeba obliczyć sumę cyfr składających tę liczbę: 3 + 5 + 3 + 0 + 6 + 9 = 26

Po wykonaniu dzielenia 26 : 9 reszta wyniesie 8. Odejmując resztę 8 lub dodając tyle, ile wystarczy do wyzerowania reszty (w tym wypadku 1) od dzielnej otrzyma się dzielenia 353061 : 9 albo 353070 : 9, oba dzielące się bez reszty.

Piramidka podnoszenia 9 i ciągów 9 do kwadratu

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$99999^2 = 9999800001$$

……………………………

Wpisuje się cyfry 8 i 1, a przed ósemką pisze się tyle dziewiątek, a przed jedynką tyle zer minus jedno, z ilu dziewiątek składa się liczb podniesiona do kwadratu.

Jak napisać 9 wszystkimi cyframi, by użyć ich tylko raz?

Z zerem:						Bez zera:				
97524		95823		95742		75249		58239		57429
=====	albo	=====	albo	=====		=====	albo	=====	albo	=====
10386		10647		10638		8361		6471		6381

Jak przy użyciu tylko 3 dziewiątek uzyskać ogromną liczbę?

Trzeba umieścić dziewiątki tak:

9*9*9
(9 do potęgi dziewiątej podniesionej do potęgi dziewiątej)

Zaś 9*9 = 387 420 489, więc 9*9*9 = $9^{387\ 420\ 489}$

Na szczęście już nie trzeba sprawdzać, ile cyfr będzie mieć taka liczba, bo w książce *Initiations mathematiques* Laisant obliczył, że wyjdzie 369 692 128 cyfr.
Jeśli by chcieć ją zapisać, a każda liczba miałaby 4 mm, zajęłoby to nieco ponad 1478 km, czyli więcej niż ze Szczecina do Augustowa tam i z powrotem.

Co można robić z 11?

By otrzymać dowolną potęgę jedenastki, nie trzeba mnożyć po kolei 11 x 11 x 11…

Można to zrobić łatwiej dzięki zbudowaniu piramidki:

$11^1 = 11 \quad 1 + 1 = 2$

$11^2 = 121 \quad 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$11^3 = 1331 \quad 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

$11^4 = 14641 \quad 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

……………………..

Ostatnia jest zawsze jedynka, dziesiątki potęgi równają się dziesiątkom + jednościom poprzedniej potęgi, setki równają się setkom + dziesiątkom itd.

Również ciekawe wyniki daje mnożenie różnych ciągów jedynki:

11 x 111 = 1221

111 x 11111 = 1233321

11111 x 111111 = 1234554321

Ile jest różnicy w ilości jedynek (np. przykład pierwszy 3 jedynki - 2 jedynki), tyle razy jeszcze się powtórzy środkowa cyfra.

Jeszcze ciekawiej jest z piramidą kwadratów liczb złożonych z samych jedynek.

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$
$$11111111^2 = 123456787654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

Kombinacje z liczbami z poprzedniej tabelki.

Jeśli 12345678987654321 pomnoży się przez:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, czyli przez 81 (9 x 9), otrzyma się

999999999 x 999999999 = 12345678987654321 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)

A kwadraty “jedynaczek” wykazują jeszcze więcej ciekawostek:

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 = 6^2$$

……………………..

Coś o 37

Kiedy ustali się postęp, gdzie pierwszy wyraz i różnica między wyrazami wynosi 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

I pomnoży się przez 37, otrzyma się:

111, 222, 333, 444, 555, 666… 999

Poza tym można zauważyć, że suma cyfr wynosi tyle, ile początkowy wyraz.

1 + 1 + 1 = 3 2 + 2 + 2 = 6 3 + 3 + 3 = 9 …

37 pomnożona przez sumę swych cyfr będzie równy sumie sześcianów tychże cyfr:

$37 \times (3 + 7) = 370 = 27 + 343 = 3^3 + 7^3$

A 37 powiększone o iloczyn jej cyfr daje sumę kwadratów tych cyfr:

$37 + 3 \times 7 = 58 = 3^2 + 7^2$

Jednak chyba najważniejszą własnością 37 i 41 jest to...

… że przy cyklicznym cyklicznym przestawianiu cyfr tych wielokrotności one nie tracą podzielności przez 37:

259 = 37 x 7	185 = 37 x 5	296 = 37 x 8
592 = 37 x 16	518 = 37 x 14	629 = 37 x 17
925 = 37 x 25	851 = 37 x 23	962 = 37 x 26

Podobnie jest z 41, np.:

17589 = 41 x 429
75891 = 41 x 1851
58917 = 41 x 1437
89175 = 41 x 2175
91758 = 41 x 2238

Co takiego ma 45?

Liczba ta składa się z 4 liczb: 8, 12, 5 i 20, czyli inaczej: 45 = 8 + 12 + 5 + 20. Jeśli na tych liczbach wykona się wszystkie podstawowe działania z dwójką, we wszystkich przypadkach otrzyma się liczbę 10:

8 + 2 = 10

12 - 2 = 10

5 x 2 = 10

20 : 2 = 10

Ale nie tylko 45 się tak rozkłada. Każda liczba postaci $c = a(b+1)^2$, gdzie a i b to dowolne liczby naturalne. Na przykład 400 może zostać tak rozłożone na 5 sposobów:

27 + 9 = 36	60 + 4 = 64	72 + 3 = 75	0 + 19 = 19	99 + 1 = 100
45 - 9 = 36	68 - 4 = 64	78 - 3 = 75	38 - 19 = 19	101 - 1 = 100
4 x 9 = 36	16 x 4 = 64	25 x 3 = 75	1 x 19 = 19	100 x 1 = 100
324 : 9 = 36	256 : 4 = 64	225 : 3 = 75	361 : 19 = 19	100 : 1 = 100

Odwracalne mnożenia

Nazywa się nimi takie mnożenia, które czytane wspak dadzą iloczyny odwróconych czynników, np.:

2 x 41 = 82 || 28 = 14 x 2

21 x 32 = 672 || 276 = 23 x 12

221 x 312 = 68952 || 25986 = 213 x 122

Jeśli ktoś chciałby sam poszukać liczb do odwracalnych mnożeń musi wiedzieć, by unikać cyfr, których iloczyn będzie większy niż 9.

Często odwracalne są również kwadraty liczb dwu- i trzycyfrowych, takich jak:

12 x 12 = 144 || 441 = 21 x 21

13 x 13 = 169 || 961 = 31 x 31

112 x 112 = 12544 || 44521 = 211 x 211

122 x 122 = 14884 || 48841 = 221 x 221

Najłatwiejsze liczby do mnożenia

Jest liczba kończąca się na 2, że jeśli przeniesie się tę dwójkę na początek liczby, wychodzi liczba równo 2 razy większa od poprzedniej. A to jest ta liczba:

105263157894736842

210526315789473684

Jak odnaleziono taką liczbę? Skoro ostatnia cyfra jest dwójką, to przedostatnia musi być 2 razy większa, czyli 4, 2 razy większa od 4 to będzie 8, po 8 będzie 6 itd. aż do 0, którego nie da się podwoić. Można taką liczbę zapisać wielokrotnie, a i tak własność mnożenia przez 2 zostanie zachowana:

105263157894736842105263157894736842

Tak samo można odnaleźć liczbę, którą po przestawieniu 4 z końca na początek liczby całość stanie się 4 razy większa i też będzie można pisać tę liczbę ciągiem, np.:

102564

410256

Łatwe liczby do dzielenia

Aby podzielić liczbę 8712 przez 4, wystarczy ją napisać wspak:

8712
==== = 4
2178

Tak samo można ją i powtórzyć wielokrotnie, i wpisać między 7 a 1 dziewiątki, a nawet między 2 a 8 wpisywać zera, byle tylko zachować symetryczność liczby:

87991208712000087120879912
========================== = 4
21997802178000021780219978

Podobnie dzieje się z liczbą 9801, która samym odwróceniem kolejności cyfr daje się podzielić przez 9:

9801 : 9 = 1089

A skoro o 1089 mowa...

Po wzięciu jakiejkolwiek liczby trzycyfrowej (liczba setek większa niż liczba jedności) i odjęciu liczby odwróconej:

```
   674          473
  -476         -374
  ====         ====
   198          099 (jeśli wyjdzie brak setek, wpisuje się zero)
```

I po dodaniu do tej liczby odwrócony odpowiednik, zawsze wyjdzie 1089:

```
   198          099
  +891         +990
  =====        =====
  1089         1089
```

Po pomnożeniu 1089 przez 2 i 8:

```
1089        1089
x    2      x    8
====        ====
2178        8712
```

… wychodzą liczby do siebie odwrotne. Tak samo będzie za każdym razem, gdy weźmie się do pary cyfry oddalone o tyle samo od piątki, np. 4 i 6, 1 i 9 itp.

A jeśli pomnoży się 1089 przez 5, liczba jest odwrócona sama w sobie:

```
 1089
  x 5
=====
 5445
```

Identyczna zasada będzie obowiązywać, gdy między 0 a 8 wpisze się ileś 9, a między 1 a 9 ileś zer.

Liczba kolista

Inaczej zwana 142857, jest to jedna z najbardziej tajemniczych liczb. Liczbę tę otrzymuje się przy zamianie ułamka 1/7 na ułamek dziesiętny. W wyniku dzielenia 1:7 wychodzi liczba 0,142857 + reszta 1 - taka sama, jak na początku, czyli bez końca będą się powtarzać.

Jeśli 142857 będzie się mnożyć przez 2, 3, 4, 5 i 6, to otrzyma się taki sam zestaw cyfr, tylko w innym porządku:

142857 x 1 = 142857

x 2 = 285714

x 3 = 428571

x 4 = 571428

x 5 = 714285

x 6 = 857142

A kiedy pomnoży się liczbę kolistą przez 8...

… wychodzi ciekawa liczba 114286. Otóż jeśli usunie się wszystko powyżej miliona włącznie (czyli przy 114286 usunie się pierwszą jedynkę) i doda się tę liczbę do okrojonej całości, wychodzi liczba kolista. A jeśli pomnoży się liczbę przez jeszcze większe liczby naturalne i zastosuje się tę zasadę, to będą wychodzić liczby koliste pomnożone o jakąś liczbę naturalną od 2 do 6:

8 x 142857 = 1 142 856 (142857)

9 x 142857 = 1 285 713 (285714)

10 x 142857 = 1 428 570 (428571)

…………

16 x 142857 = 2 285 712 (285714)

…………

89 x 142857 = 12 714 273 (714285)

ZAKOŃCZENIE

Te wszystkie ciekawostki pokazane na tej prezentacji to bardzo mało w całym świecie matematyki. Jest wiele innych właściwości wielu innych liczb, na które nie starczyłoby miejsca. Z samej książki użyto nie więcej niż ⅔ całego działu.

Bibliografia:

- “Lilavati” Szczepana Jeleńskiego: rozdział 2 “Ciekawe właściwości liczb i działań matematycznych”

Właściwości siódemki

Jeśli w postępie arytmetycznym, którego pierwszym wyrazem i różnicą jest liczba 15873 (czyli 15873, 31746, 47619 itd.), mnożyć będziemy przez 7, otrzyma się ciekawe iloczyny. Liczby 15873, 31746 itd. do 142857 mnożone przez 7 dają zawsze liczbę składającą się z powtórzonej 6 razy powtórzonej tej samej cyfry:

15873 x 7 = 111111   31746 x 7 = 222222   …   79365 x 7 = 555555   …   142857 x 7 = 999999

Można ten zbieg łatwo wyjaśnić: 31746 x 7 = (2 x 15873) x 7 = 2 x (15873 x 7) = 2 x 111111

Ale trudniej jest wytłumaczyć jest to,

że jeśli między 49 (kwadrat 7) będzie się wstawiać 48, czyli:

49, 4489, 444889, 44448888 …

to będą zawsze pełne kwadraty:

49 = 7*2   4489 = 67*2   444889 = 667*2   44448889 = 6667*2   ………..

Jeszcze ciekawiej jest z kombinacją 7x11x13 (czyli 143)

Jeśli pomnoży się liczbę 143 z jedną z dowolnych pierwszych 999 wielokrotności 7, to iloczyn będzie złożony z dwóch identycznych liczb, np.:

28 x 143 = 4004 315 x 143 = 45045 1001 x 143 = 143143 2464 x 143 = 352352

3591 x 143 = 513513 5495 x 143 = 785785 6993 x 143 = 999999

Należy też zauważyć, że podzielona wielokrotność przez 7 daje liczbę powtarzającą się w iloczynie:

28:7 = 4 315:7 = 45 2464:7 = 352 ……

To zjawisko trudne na pierwszy rzut oka wyjaśnia się w miarę prosto. Wystarczy stwierdzić, że 7 x 143 = 1001.

2464 x 143 = (352 x 7) x 143 = 352 x (7 x 143) = 352 x 1001 = 352 x 1000 + 352 = 352352

Podobne rezultaty otrzymuje się mnożąc 77 przez 999 pierwszych wielokrotności 13 lub 91 przez tę ilość wielokrotności 11.

Przejście do dziewiątki zostanie poprzedzone piramidką iloczynów

$9 \times 7 = 63$

$99 \times 77 = 7623$

$999 \times 777 = 776223$

$9999 \times 7777 = 77762223$

$99999 \times 77777 = 7777622223$

i tak dalej.

Każdą liczbę można rozłożyć do dziewiątki pomnożonej pewną ilość i sumy cyfr składających liczbę.

Przykłady:

4 = 0 x 9 + 4

84 = 8 x 9 + (8+4)

214 = 23 x 9 + (2+1+4)

511 = 56 x 9 +(5+1+1)

2033 = 225 x 9 + (2+0+3+3)

Można tak postępować z każdą liczbą:

696679 = (wielokrotność 9)+(6+9+6+6+7+9)

Gdy liczba zapisana jest jedną cyfrą i kilkoma zerami...

… można ją zapisać sumą tej cyfry i pomnożonej liczbie napisaną tyloma dziewiątkami, ile zer prowadzi cyfra:

10 = 9 x 1 + 1 300 = 99 x 3 + 3 2000 = 999 x 2 + 2

90000 = 9999 x 9 + 9 600000 = 99999 x 9 + 6

itd.

Gdy przy ciągu pierwszych 10 liczb naturalnych...

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

… pomnoży się te liczby przez 9, skąd wychodzi: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

Ostatnie cyfry tych liczb stanowią odwrotny ciąg pierwszych 10 liczb naturalnych. Tak samo będzie z każdym ciągiem z 10 liczbami, gdzie pierwsza z nich kończy się jedynką:

111 x 9 = 999 112 x 9 = 1008 113 x 9 = 1017 114 x 9 = 1026 itd.

Kilka tabliczek związane z mnożeniem 9

1.

1 x 9 = 09	90 = 9 x 10
2 x 9 = 18	81 = 9 x 9
3 x 9 = 27	72 = 9 x 8
4 x 9 = 36	63 = 9 x 7
5 x 9 = 45	54 = 9 x 6

2. Jakakolwiek liczba pomnożona przez 9 daje sumę cyfr równą 9 lub podzielną przez 9:

9 x 1 = 9	9 x 10 = 90	33 x 9 = 297
9 x 2 = 18, 1+8=9	9 x 11 = 99	34 x 9 = 306
9 x 3 = 27, 2+7=9	9 x 12 = 108	35 x 9 = 315
9 x 4 = 36, 3+6=9	9 x 13 = 117	36 x 9 = 324
9 x 5 = 45, 4+5=9	9 x 14 = 126	37 x 9 = 333
……	……	…...

3.

1 x 9 + 2 = 11
12 x 9 + 3 = 111
123 x 9 + 4 = 1111
1234 x 9 + 5 = 11111
12345 x 9 + 6 = 111111
123456 x 9 + 7 = 1111111
1234567 x 9 + 8 = 11111111
12345678 x 9 + 9 = 111111111

4.

9 x 9 + 7 = 88
98 x 9 + 6 = 888
987 x 9 + 5 = 8888
9876 x 9 + 4 = 88888
98765 x 9 + 3 = 888888
987654 x 9 + 2 = 8888888
9876543 x 9 + 1 = 88888888
98765432 x 9 + 0 = 888888888
987654321 x 9 - 1 = 8888888888

By pomnożyć coś przez jakiś ciąg 9 (np. 99, 999 itp.)...

Wystarczy zrobić tylko jedno odejmowanie. Jeśli przyjąć, że trzeba pomnożyć przez tę liczbę 29486, trzeba napisać tę liczbę jako odjemną i jako odjemnik, który zostanie przesunięty o tyle miejsc w prawo, ile jest dziewiątek, np. o 3 miejsca w przypadku mnożenia przez 999:

```
  29486 . . .
     - 29486        I to jest poszukiwany iloczyn.
===========

  29456514
```

Podobnie można to zastosować w przypadku dzielenia.

Potrzeba np. podzielić 6725 przez 99. Najpierw podzieli się przez 100: 6725 = 67 x 100 + 25
A 100 = 99 + 1, więc: 67 x 100 = 67 x 99 + 67
Można zauważyć, że: 6725 = 67 x 99 + (67 + 25)

Dzieląc tę liczbę przez 99 otrzymuje się w ilorazie 67 i resztę złożoną z 67 (liczba setek w dzielnej) i 25 (końcówka dzielnej po odrzuceniu setek). A skoro 67 + 25 = 92, to: 6725 : 99 = 67 r 92. Gdyby reszta przekroczyła wartość dzielnika, należy dołożyć do ilorazu tyle, ile razy dzielnik zmieścił się w reszcie.

Bardzo pożyteczny sposób na sprawdzenie poprawności dzielenia przez 9.

Reszta z podziału jakiejkolwiek liczby przez 9 jest równa reszcie dzielenia sumy cyfr tej liczby przez 9.

Przykład (bez ilorazu, jedynie reszta):

1374 : 9
9
======
47
45
======
24
18
======
6 r.

1 + 3 + 7 + 4 = 15

15 : 9 = 1   6 r.

Z tego również wynika, że jeśli od jakiejś liczby odejmie się sumę cyfr, wychodzi liczba podzielna przez 9:

1374 - (1 + 3 + 7 + 4) = 1359

Liczba 1359 dzieli się przez 9, ponieważ suma cyfr jest podzielna przez 9.

Suma kilku liczb podzielona przez 9 daje taką samą resztę, jak suma cyfr tych liczb, np.:

619 + 543 + 278 = 1440

1440 : 9
9
======
54
54
======
0 r.

6 + 1 + 9 = 16
5 + 4 + 3 = 12
2 + 7 + 8 = 17
===========
45

45 : 9
45
=====
0 r.

To samo można zauważyć przy odejmowaniu, gdzie oblicza się różnicę sum cyfr.

Kłopot może zajść, gdy suma cyfr odjemnika jest większa od sumy cyfr odjemnej. Wtedy należy tyle dziewiątek do momentu możliwości odejmowania, np:

2012 - 1942 = 70
70 : 9 = 7 r. 7

2 + 0 + 1 + 2 = 5
1 + 9 + 4 + 2 = 16

J

ak odjąć 16 od 5? Dodając tyle dziewiątek, by dało się odjąć, czyli 5 + 9 + 9 = 23
23 - 16 = 7

Resztę iloczynu dwóch liczb można znaleźć, mnożąc reszty dziewiątkowe obu czynników i dzieląc iloczyn przez 9.

30	840 : 9	3 + 0 = 3
x 28	81	2 + 8 = 10
=======	=====	
240	30	
60	27	10 x 3 = 30
=======	=====	
840	3 r.	30 : 9
		27
		====
		3 r.

Mnożenie reszt daje 30, które następnie jest dzielone: 30 : 9 = 3 r. 3. 30 daje resztę taką samą jaką ma liczba 840.

Opierając się na poprzedniej własności można w ciekawy sposób dzielić przez 9.

Niech będzie potrzeba podzielić przez 9 liczbę 353069.

Trzeba obliczyć sumę cyfr składających tę liczbę: 3 + 5 + 3 + 0 + 6 + 9 = 26

Po wykonaniu dzielenia 26 : 9 reszta wyniesie 8. Odejmując resztę 8 lub dodając tyle, ile wystarczy do wyzerowania reszty (w tym wypadku 1) od dzielnej otrzyma się dzielenia 353061 : 9 albo 353070 : 9, oba dzielące się bez reszty.

Piramidka podnoszenia 9 i ciągów 9 do kwadratu

$9^2 = 81$

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$

…………………………

Wpisuje się cyfry 8 i 1, a przed ósemką pisze się tyle dziewiątek, a przed jedynką tyle zer minus jedno, z ilu dziewiątek składa się liczb podniesiona do kwadratu.

Jak napisać 9 wszystkimi cyframi, by użyć ich tylko raz?

Z zerem:

97524		95823		95742
=====	albo	=====	albo	=====
10386		10647		10638

Bez zera:

75249		58239		57429
=====	albo	=====	albo	=====
8361		6471		6381

Jak przy użyciu tylko 3 dziewiątek uzyskać ogromną liczbę?

Trzeba umieścić dziewiątki tak:

9*9*9

(9 do potęgi dziewiątej podniesionej do potęgi dziewiątej)

Zaś 9*9 = 387 420 489, więc 9*9*9 = $9^{387\ 420\ 489}$

Na szczęście już nie trzeba sprawdzać, ile cyfr będzie mieć taka liczba, bo w książce *Initiations mathematiques* Laisant obliczył, że wyjdzie 369 692 128 cyfr.

Jeśli by chcieć ją zapisać, a każda liczba miałaby 4 mm, zajęłoby to nieco ponad 1478 km, czyli więcej niż ze Szczecina do Augustowa tam i z powrotem.

Co można robić z 11?

By otrzymać dowolną potęgę jedenastki, nie trzeba mnożyć po kolei 11 x 11 x 11…

Można to zrobić łatwiej dzięki zbudowaniu piramidki:

$11^1 = 11 \qquad 1 + 1 = 2$

$11^2 = 121 \qquad 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$11^3 = 1331 \qquad 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

$11^4 = 14641 \qquad 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

……………………..

Ostatnia jest zawsze jedynka, dziesiątki potęgi równają się dziesiątkom + jednościom poprzedniej potęgi, setki równają się setkom + dziesiątkom itd.

Również ciekawe wyniki daje mnożenie różnych ciągów jedynki:

11 x 111 = 1221

111 x 11111 = 1233321

11111 x 111111 = 1234554321

Ile jest różnicy w ilości jedynek (np. przykład pierwszy 3 jedynki - 2 jedynki), tyle razy jeszcze się powtórzy środkowa cyfra.

Jeszcze ciekawiej jest z piramidą kwadratów liczb złożonych z samych jedynek.

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

$111111^2 = 12345654321$

$1111111^2 = 1234567654321$

$11111111^2 = 123456787654321$

$111111111^2 = 12345678987654321$

Kombinacje z liczbami z poprzedniej tabelki.

Jeśli 12345678987654321 pomnoży się przez:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, czyli przez 81 (9 x 9), otrzyma się

999999999 x 999999999 = 12345678987654321 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)

A kwadraty “jedynaczek” wykazują jeszcze więcej ciekawostek:

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 = 6^2$$

……………………..

Coś o 37

Kiedy ustali się postęp, gdzie pierwszy wyraz i różnica między wyrazami wynosi 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

I pomnoży się przez 37, otrzyma się:

111, 222, 333, 444, 555, 666… 999

Poza tym można zauważyć, że suma cyfr wynosi tyle, ile początkowy wyraz.

$1 + 1 + 1 = 3 \qquad 2 + 2 + 2 = 6 \qquad 3 + 3 + 3 = 9 \ldots$

37 pomnożona przez sumę swych cyfr będzie równy sumie sześcianów tychże cyfr:

$37 \times (3 + 7) = 370 = 27 + 343 = 3^3 + 7^3$

A 37 powiększone o iloczyn jej cyfr daje sumę kwadratów tych cyfr:

$37 + 3 \times 7 = 58 = 3^2 + 7^2$

Jednak chyba najważniejszą własnością 37 i 41 jest to...

… że przy cyklicznym cyklicznym przestawianiu cyfr tych wielokrotności one nie tracą podzielności przez 37:

259 = 37 x 7	185 = 37 x 5	296 = 37 x 8
592 = 37 x 16	518 = 37 x 14	629 = 37 x 17
925 = 37 x 25	851 = 37 x 23	962 = 37 x 26

Podobnie jest z 41, np.:

17589 = 41 x 429
75891 = 41 x 1851
58917 = 41 x 1437
89175 = 41 x 2175
91758 = 41 x 2238

Co takiego ma 45?

Liczba ta składa się z 4 liczb: 8, 12, 5 i 20, czyli inaczej: 45 = 8 + 12 + 5 + 20. Jeśli na tych liczbach wykona się wszystkie podstawowe działania z dwójką, we wszystkich przypadkach otrzyma się liczbę 10:

$$8 + 2 = 10$$

$$12 - 2 = 10$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$20 : 2 = 10$$

Ale nie tylko 45 się tak rozkłada. Każda liczba postaci $c = a(b+1)^2$, gdzie a i b to dowolne liczby naturalne. Na przykład 400 może zostać tak rozłożone na 5 sposobów:

27 + 9 = 36	60 + 4 = 64	72 + 3 = 75	0 + 19 = 19	99 + 1 = 100
45 - 9 = 36	68 - 4 = 64	78 - 3 = 75	38 - 19 = 19	101 - 1 = 100
4 x 9 = 36	16 x 4 = 64	25 x 3 = 75	1 x 19 = 19	100 x 1 = 100
324 : 9 = 36	256 : 4 = 64	225 : 3 = 75	361 : 19 = 19	100 : 1 = 100

Odwracalne mnożenia

Nazywa się nimi takie mnożenia, które czytane wspak dadzą iloczyny odwróconych czynników, np.:

2 x 41 = 82 || 28 = 14 x 2

21 x 32 = 672 || 276 = 23 x 12

221 x 312 = 68952 || 25986 = 213 x 122

Jeśli ktoś chciałby sam poszukać liczb do odwracalnych mnożeń musi wiedzieć, by unikać cyfr, których iloczyn będzie większy niż 9.

Często odwracalne są również kwadraty liczb dwu- i trzycyfrowych, takich jak:

12 x 12 = 144 || 441 = 21 x 21

13 x 13 = 169 || 961 = 31 x 31

112 x 112 = 12544 || 44521 = 211 x 211

122 x 122 = 14884 || 48841 = 221 x 221

Najłatwiejsze liczby do mnożenia

Jest liczba kończąca się na 2, że jeśli przeniesie się tę dwójkę na początek liczby, wychodzi liczba równo 2 razy większa od poprzedniej. A to jest ta liczba:

105263157894736842

210526315789473684

Jak odnaleziono taką liczbę? Skoro ostatnia cyfra jest dwójką, to przedostatnia musi być 2 razy większa, czyli 4, 2 razy większa od 4 to będzie 8, po 8 będzie 6 itd. aż do 0, którego nie da się podwoić. Można taką liczbę zapisać wielokrotnie, a i tak własność mnożenia przez 2 zostanie zachowana:

105263157894736842105263157894736842

Tak samo można odnaleźć liczbę, którą po przestawieniu 4 z końca na początek liczby całość stanie się 4 razy większa i też będzie można pisać tę liczbę ciągiem, np.:

102564

410256

Łatwe liczby do dzielenia

Aby podzielić liczbę 8712 przez 4, wystarczy ją napisać wspak:

8712
==== = 4
2178

Tak samo można ją i powtórzyć wielokrotnie, i wpisać między 7 a 1 dziewiątki, a nawet między 2 a 8 wpisywać zera, byle tylko zachować symetryczność liczby:

87991208712000087120879912
========================== = 4
21997802178000021780219978

Podobnie dzieje się z liczbą 9801, która samym odwróceniem kolejności cyfr daje się podzielić przez 9:

9801 : 9 = 1089

A skoro o 1089 mowa...

Po wzięciu jakiejkolwiek liczby trzycyfrowej (liczba setek większa niż liczba jedności) i odjęciu liczby odwróconej:

674	473
-476	-374
====	====
198	099 (jeśli wyjdzie brak setek, wpisuje się zero)

I po dodaniu do tej liczby odwrócony odpowiednik, zawsze wyjdzie 1089:

198	099
+891	+990
=====	=====
1089	1089

Po pomnożeniu 1089 przez 2 i 8:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 2 \\ \hline 2178 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 8 \\ \hline 8712 \end{array}$$

… wychodzą liczby do siebie odwrotne. Tak samo będzie za każdym razem, gdy weźmie się do pary cyfry oddalone o tyle samo od piątki, np. 4 i 6, 1 i 9 itp.

A jeśli pomnoży się 1089 przez 5, liczba jest odwrócona sama w sobie:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 5 \\ \hline 5445 \end{array}$$

Identyczna zasada będzie obowiązywać, gdy między 0 a 8 wpisze się ileś 9, a między 1 a 9 ileś zer.

Liczba kolista

Inaczej zwana 142857, jest to jedna z najbardziej tajemniczych liczb. Liczbę tę otrzymuje się przy zamianie ułamka 1/7 na ułamek dziesiętny. W wyniku dzielenia 1:7 wychodzi liczba 0,142857 + reszta 1 - taka sama, jak na początku, czyli bez końca będą się powtarzać.

Jeśli 142857 będzie się mnożyć przez 2, 3, 4, 5 i 6, to otrzyma się taki sam zestaw cyfr, tylko w innym porządku:

142857 x 1 = 142857

x 2 = 285714

x 3 = 428571

x 4 = 571428

x 5 = 714285

x 6 = 857142

A kiedy pomnoży się liczbę kolistą przez 8...

… wychodzi ciekawa liczba 114286. Otóż jeśli usunie się wszystko powyżej miliona włącznie (czyli przy 114286 usunie się pierwszą jedynkę) i doda się tę liczbę do okrojonej całości, wychodzi liczba kolista. A jeśli pomnoży się liczbę przez jeszcze większe liczby naturalne i zastosuje się tę zasadę, to będą wychodzić liczby koliste pomnożone o jakąś liczbę naturalną od 2 do 6:

8 x 142857 = 1 142 856 (142857)

9 x 142857 = 1 285 713 (285714)

10 x 142857 = 1 428 570 (428571)

…………

16 x 142857 = 2 285 712 (285714)

…………

89 x 142857 = 12 714 273 (714285)

ZAKOŃCZENIE

Te wszystkie ciekawostki pokazane na tej prezentacji to bardzo mało w całym świecie matematyki. Jest wiele innych właściwości wielu innych liczb, na które nie starczyłoby miejsca. Z samej książki użyto nie więcej niż ⅔ całego działu.

Bibliografia:

- “Lilavati” Szczepana Jeleńskiego: rozdział 2 “Ciekawe właściwości liczb i działań matematycznych”