Miłosz Szczypior
IV Liceum Ogólnokształcące im. Henryka Sienkiewicza w Częstochowie
Nowy Kocin, ul. Prosta 59

MAGICZNE KWADRATY

1. Wstęp

Wśród figur magicznych największą popularnością zawsze były kwadraty magiczne, czyli kwadraty podzielone na pewną liczbę jednakowych pól, w który wpisuje się pewien pewien w taki sposób, że każda kolumna, każdy wiersz i obie przekątne kwadratu w które są wpisane liczby, to ich suma jest taka sama.
Kwadraty mogą być zależnie od postępu liczb na arytmetyczne i geometryczne, zależnie od podziałek boków na parzyste, nieparzyste i nieparzysto-parzyste i zależnie od ustawienia liczb na magiczne zwykłe i hipermagiczne.

2. Właściwości ogólne

I. Kwadrat dalej będzie magiczny, jeśli do każdej liczby znajdującej się w kwadracie doda się lub odejmie tą samą liczbę. Działa to również podczas mnożenia lub dzielenia przez tą samą liczbę. Najlepiej to zobrazować na przykładzie.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

+6

8	15	10
13	11	9
12	7	14

x2

16	30	20
26	22	18
24	14	28

W pierwszym kwadracie suma magiczna (suma liczb poszczególnych rzędów, kolumn lub przekątnych) wynosi 15, w drugim suma magiczna podniosła się do 15 + 3 x 6 = 33, a w ostatnim wszystkie wyrazy pomnożono o 2 i suma magiczna wynosi 2 x 33 = 66.

II. Jeśli kwadrat jest magiczny dla jakiegoś postępu arytmetycznego, to też będzie magiczny dla tak samo rozmieszczonego postępu o innym pierwszym wyrazie i o innej różnicy między wyrazami. Można np. zamiast 1, 2, 3… 8, 9 napisać wyrazu postępu 91, 96, 101… 126, 131.

III. Można dodać dwa magiczne kwadraty, z których powstanie kwadrat magiczny. Dodaje się do siebie liczby w analogicznych polach i wstawia się sumę w to samo miejsce.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

\+

13	20	15
18	16	14
17	12	19

=

15	29	19
25	21	17
23	13	27

Suma magiczna takiego połączonego kwadratu jest sumą sum magicznych poprzednich kwadratów: 15 + 48 = 63.

IV. Kwadrat magiczny pozostanie magicznym, jeśli przestawi się jego kolumny i rzędy leżące symetrycznie względem środka kwadratu.

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	11	4

W pierwszym kwadracie po przestawieniu pierwszej i czwartej kolumny powstał drugi kwadrat. Suma magiczna zachowała się w kolumnach i rzędach, ale nie w przekątnych, jednak kiedy przestawimy pierwszy i czwarty rząd, to kwadrat na nowo stanie się magiczny.

V. Suma magiczna jest równa połowie sumy najmniejszego i największego wyrazu pomnożonej przez liczbę pól zajmujących bok kwadratu.
Np. suma magiczna najmniejszego kwadratu magicznego z 9 pól równa się:

$$\frac{1 + 9}{2} = 15$$

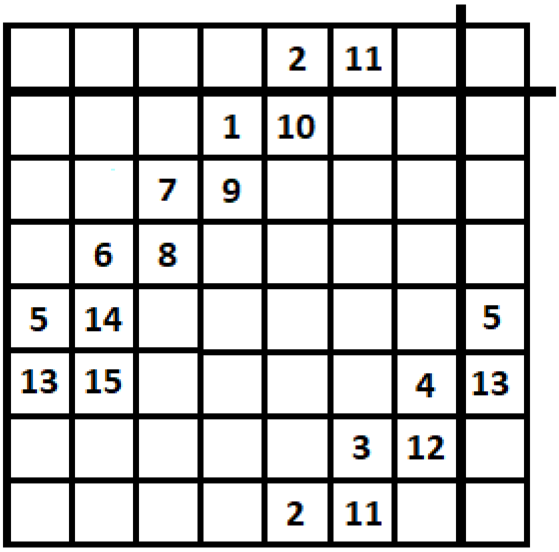
3. Metody tworzenia nieparzystych kwadratów magicznych

I. Metoda hinduska

				10		4	
5					11		5
	6					12	
13		7					13
	14		1				
		8		2			
	15		9		3		
				10		4	

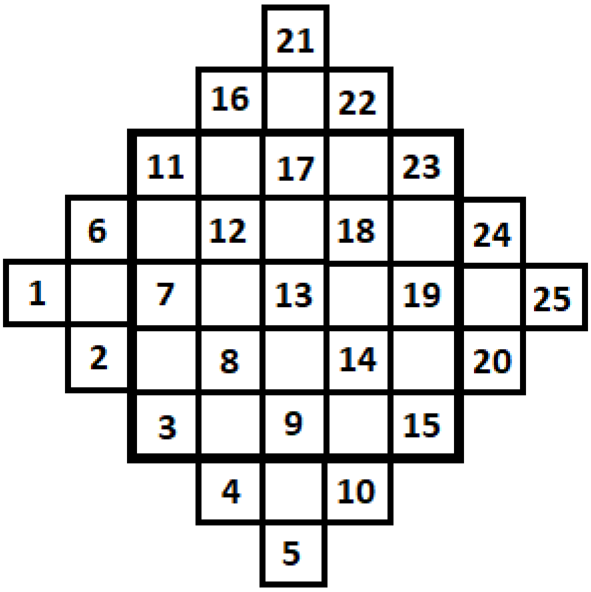
Dla przykładu weźmy kwadrat 49-polowy. Pierwszy wyraz (tutaj 1) wpisujemy pod środkowym polem. Następne wyrazy wpisujemy po przekątnej o jedno pole w dół i prawo. Tutaj 4 wypadnie poza kwadrat, przez co trzeba je przetransportować na analogiczne pole wewnątrz kwadratu (skoro 4 było w polu pod dolną krawędzią, to trzeba je wrzucić na pole pod górną krawędzią kwadratu). Piątka też wypadnie poza kwadrat i trzeba zrobić z nią to samo, co z czwórką. Ósemka musi wejść w pole, ale jest ono zajęte przez jedynkę. W tym wypadku trzeba postawić 8 dwa pola pod poprzednim wyrazem i trzymając się tych reguł w końcu dojdzie się do ostatniego wyrazu, czyli 49, a suma magiczna tego kwadratu wyniosi (1 + 49)/2 x 7 = 175.

II. Metoda syjamska



Bardzo podobna metoda do hinduskiej, jednak zamiast pod środkowym polem pierwszy wyraz stawia się w środkowym polu górnego rzędu, wyrazy idą tym razem o 1 pole w górę i prawo, a po natrafieniu na pole zajęte przez inną liczbę wyraz idzie bezpośrednio pod poprzednią liczbę. W tym wypadku też suma magiczna wynosi 175.

III. Metoda Bacheta



11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Jedna z najłatwiejszych metod budowy kwadratów magicznych. Polega na dobudowaniu na ściankach 4 pomocniczych piramidek.

Rozpoczynając z któregokolwiek wierzchołka piramidki idzie się z następnymi liczbami po przekątnej kwadratu. Po wpisaniu ostatniej liczby piramidki wpisuje się w przeciwstawny bok, np. lewą obtacza się 19.

Jest to kwadrat symetryczny. Na jednej przekątnej widać postęp 11 - 15, a każda para liczb symetrycznych względem środka dodana do siebie da w sumie 26.

IV. Metoda skoczka szachowego

			3					
			11			6		
		2				14		
		10			5	15		
	1				13			
	9			4				
7				12			7	
8			3					
			11			6		

Metoda łatwa i ciekawa. Zaczynamy z pierwszym wyrazem w jakimkolwiek polu, a następne liczby wpisujemy na polu, gdzie wypadłby ruch skoczka (litera L). Tak jak w poprzednich metodach, jak coś wypadnie poza kwadrat, przechodzi na pole analogiczne. Po dotarciu do 7, postępuje się tak jak z resztą wielokrotności liczby 7, to liczby po nich wpisuje się pod nimi.

4. Metody budowy kwadratów parzystych

I. Metoda de La Hire'a

Z pewnymi modyfikacjami można ją przystosować do kwadratów nieparzysto-parzystych.

2	4	1	3
3	1	4	2
3	1	4	2
2	4	1	3

0	12	12	0
4	8	8	4
8	4	4	8
12	0	0	12

Najpierw tworzymy pierwszy kwadrat pomocniczy, w tym wypadku z wyrazami 1, 2, 3, 4. Górny i dolny rząd tworzymy przesuwając jakkolwiek liczby między sobą, a w środkowych rzędach zamienia się kolejnością ten ciąg. W tym wypadku powstaje kwadrat magiczny z sumą magiczną równą 10.

Drugi kwadrat pomocniczy powstaje w podobny sposób jak pierwszy, tylko postęp zaczynający się od 0 i złożony jakkolwiek poukładany kładzie się w kolumnach. Tutaj kwadrat ma sumę magiczną równą 24.

2	16	13	3
7	9	12	6
11	5	8	10
14	4	1	15

Z dodania obu tych kwadratów powstaje nowy, z sumą magiczną 34.

II.Metoda Delanneya i Mondesira.

Metoda nowoczesna, prosta i pomysłowa. Tutaj będzie przykład na 16-polowym kwadracie, ale można ją też używać na innych parzystych kwadratach. Wystarczy przyjrzeć się kwadratowi, a wiadomo, jak on powstaje.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

5. Budowanie kwadratów nieparzysto-parzystych

Najłatwiejszą metodą do budowy takich kwadratów jest metoda de La Hire'a. Przy kwadracie 36-polowym budujemy kwadraty pomocnicze, jeden z postępu 1, 2, 3 … 6, a drugi 0, 6, 12 … 30.

5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2
5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2

24	6	24	24	6	24
0	30	0	0	30	0
12	18	12	12	18	12
18	12	18	18	12	18
30	0	30	30	0	30
6	24	6	6	24	6

Oba kwadraty nie są magiczne, ale ich przekątne dają sumę magiczną. Nawet po połączeniu ich jeszcze nie dostanie się kwadratu magicznego.

29	12	27	28	7	26
2	31	4	3	36	5
17	24	15	16	19	14
23	18	21	22	13	20
32	1	34	33	6	35
11	30	9	10	25	8

Kwadrat magiczny otrzyma się dopiero po przestawieniach. Pierwsze z nich dotyczy pierwszej od lewej kolumny i pierwszego od góry rzędu. Nie dotykając przekątnych kwadratu przenosimy wyrazy na pola analogiczne (tutaj np. 23 przejdzie na 17 i na odwrót albo 12 przejdzie na 7). Kolejne zmienia drugi i ostatni rząd. Zmieniają się miejscami 4 i 3 oraz 9 i 10. W drugiej i ostatniej kolumnie to samo dzieje się z 24 i 18 oraz z 14 i 20. Tak powstanie kwadrat czwarty, u którego wystarczy już jedynie przestawić liczby czwartej kolumny i czwartego rzędu (17 i 14, 27 i 9). Po tym powstaje kwadrat w pełni magiczny z sumą magiczną 111.

29	7	28	27	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
17	24	21	22	13	14
2	1	34	33	6	35
11	30	10	9	25	8

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	30	10	27	25	8

Przestawienia można sprowadzić do 3 reguł, przy czym nigdy nie rusza się liczb na przekątnych:
1. W pierwszym rzędzie i kolumnie pola wzajemnie sobie odpowiadające.
2. W drugich i ostatnich rzędach i kolumnach pola środkowe.
3. W jednym z rzędów i kolumn środkowych pola skrajne.

6.Budowa kwadratów o właściwościach szczególnych

I. Metoda Arnoux

Ta metoda to przejście między zwykłymi kwadratami magicznymi a hipermagicznymi. Ponieważ to metoda na zestawienie kwadratów magicznych, których podziałka jest wielokrotnością 3 jednocześnie dając kwadrat magiczny przedziałkowy.

Bierzemy kwadrat np. o 81 polach. Rozbijamy go na kwadraty o 9 polach (3x3) i kolejno biorąc po 9 wyrazów z ciągu 1-81 tworzymy ustawiamy 9 kwadratów według zasady magicznego kwadratu 9-polowego (z liczbami rzymskimi).

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

IV	IX	II
III	V	VII
VIII	I	VI

Właściwością szczególną jest to, że nie tylko cały kwadrat jest magiczny (suma magiczna 369), ale też wszystkie przedziały są magiczne.

Oczywiście też można zamiast rozbijania ciągu na 9 postępów z 9 wyrazami można uformować inne 9 postępów, gdzie każdy następny jego wyraz będzie o 9 większy i też wyjdzie kwadrat przedziałkowy, chociaż inny.

II.

W przypadku parzystych kwadratów przedziałkowych metoda jest podobna. W przypadku kwadratu ósmego rzędu (8x8) ciąg np. od 1 do 64 dzieli się na 8 części i minikwadraty tworzy się z pierwszej i ósmej, drugiej i siódmej itd. części. Kwadraty będą mieć sumę magiczną 130, a końcowy kwadrat przedziałkowy będzie miał tę sumę równą 260.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	2	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

I	XI	XIV	IV
XII	VI	VII	IX
VIII	X	XI	V
XIII	III	II	XVI

III. Kwadraty z obramowaniem

Są to kwadraty, które po rozebraniu z granicznych rzędów i kolumn dalej zostają magiczne. Niektóre mogą być rozebrane mocniej, inne mniej. Pokazany tu sposób budowy może zostać wykorzystany do każdych kwadratów.

Zacznijmy od kwadratu rzędu szóstego (6x6) i obierzmy za cel jedno obramowanie, czyli żeby po odebraniu granicznych rzędów i kolumn kwadrat czwartego rzędu dalej był magiczny.

Wyrazami będą 36 pierwszych liczb naturalnych. Zbudujemy kwadrat w tym wypadku z 8 pierwszych liczb i 8 ostatnich liczb, gdzie ten kwadrat ma sumę magiczną 74.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Docelowy kwadrat rzędu szóstego ma sumę magiczną 111, to oznacza, że po bokach i przekątnych trzeba kłaść razem liczby, które razem dają 111 - 74 = 37. Dlatego 9 i 28 oraz 10 i 27 stawiamy na rogach kwadratu 6x6, zaś resztę takich par kładziemy na bokach. Następnie trzeba jeszcze uzgodnić rzędy i kolumny między liczbami na rogach, dlatego między następującymi liczbami musi być suma liczb równa:

- między 9 a 10 **92**
- między 9 a 27 **75**
- między 10 a 28 **73**
- między 27 a 28 **56**

Znajdujemy zestawy liczb, które stworzą takie liczby, np. 92 = 26 + 25 + 23 + 18 oraz 75 = 16 + 20 + 24 + 15. Ustawiamy je w dowolnym szyku, byle dopasować do nich swoje dopełnienia, dzięki którym po zsumowaniu wyjdzie 37.

9	23	25	18	26	10
15	1	35	34	4	22
16	32	6	7	29	21
20	8	30	31	5	17
24	33	3	2	36	13
27	14	12	19	11	28

Tę samą metodę można używać do kwadratów nieparzystych.

IV. Kwadraty z krzyżem

Kwadraty z obramowaniem łatwo przerobić na kwadraty z krzyżem. By pokazać, jak to wygląda, weźmiemy kwadrat z poprzedniego podpunktu 6x6. Rozbijamy w nim kwadrat środkowy 4x4 na 4 kwadraty 2x2 i umieszczamy je w rogach, zaś liczby na obramowaniu też dzielimy i zestawiamy je w krzyżu, jednak trzeba pamiętać, że liczby na końcach przekątnych dalej mają pozostać na przekątnych.

Wyjątkowość tych kwadratów polega na tym, że części oddzielone linią dają oddzielnie pewną sumę magiczną, gdzie tutaj krzyż daje wartość 111, a reszta 74.

1	35	16	21	34	4
32	6	20	17	7	29
25	26	9	10	23	18
12	11	27	28	14	19
8	30	24	13	31	5
33	3	15	22	2	36

		16	21		
		20	17		
25	26	9	10	23	18
12	11	27	28	14	19
		24	13		
		15	22		

1	35			34	4
32	6			7	29
8	30			31	5
33	3			2	36

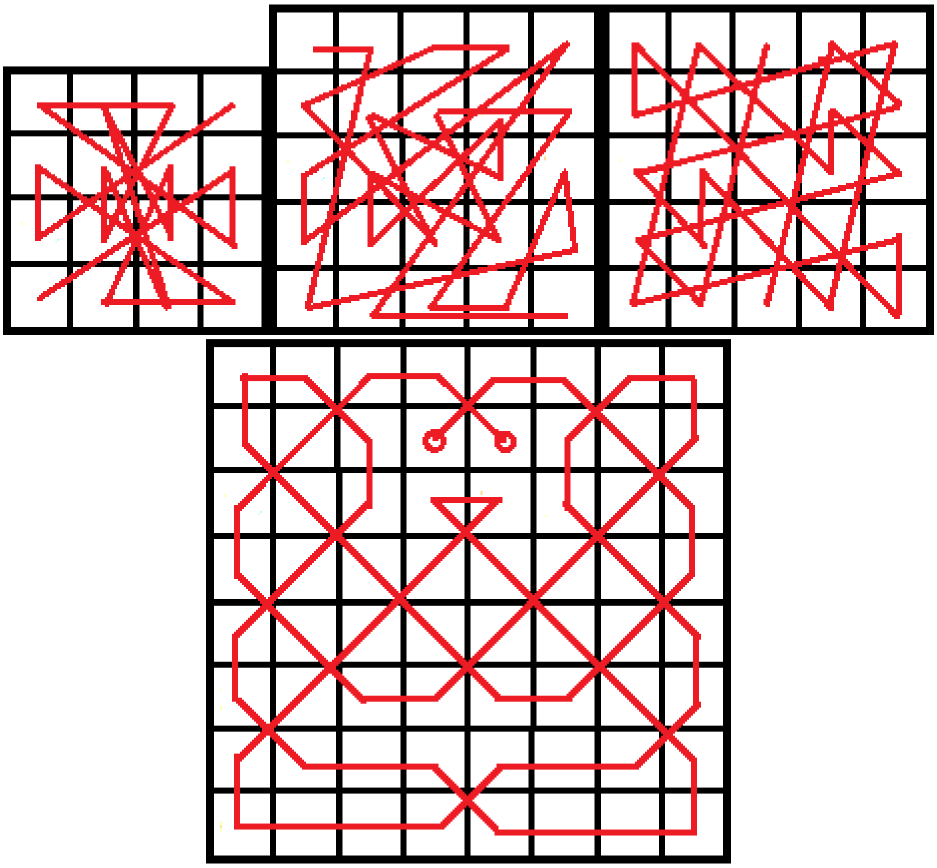
7. Kwadraty magiczne o postępach geometrycznych

Zasady budowy kwadratów z postępów geometrycznych są identyczne z kwadratami arytmetycznymi. Oczywiście zamiast liczb 1, 2, 3, 4… mamy wykładniki 0, 1, 2 , 3 i zamiast sumy magicznej mamy iloczyn magiczny.

2	256	8
64	16	4
32	1	128

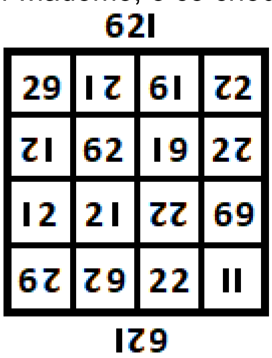
8. Diagramy geometryczne kwadratów magicznych

Budowę każdego kwadratu magicznego można zobrazować diagramami, które przedstawiają kolejne rozmieszczenie liczb po polach, z których często wychodzą ciekawe figury.



9. Kwadrat najmagiczniejszy z magicznych

Wystarczy przedstawić ten kwadrat i wiadomo, o co chodzi.



Ten kwadrat można czytać i normalnie i do góry nogami, a i tak będzie magiczny.

10. Zakończenie

Oczywiście są inne figury, z którymi można kombinować z ich magicznością, jednak to właśnie kwadraty są najpopularniejsze i to z nimi można najdłużej się bawić..

11. Bibliografia i narzędzia

- Paint (tworzenie kwadratów)
- “Lilavati” autorstwa Szczepana Jeleńskiego, rozdział 3 “Figury magiczne”